

1.2. Forces et travail mécanique.

Sommaire.

1. Rappels de mécanique.
 2. Genèse de la notion de force mécanique.
 3. Genèse de la notion de travail mécanique.
 - Mesure du rapport entre la force humaine et la force d'un cheval (1668).
 - Le Mémoire de Guillaume Amontons (1699).
 - La puissance motrice de Carnot (1824).
 - Définition du travail par Coriolis (1829).
 4. Travail reçu, travail fourni.
- Annexe 1. Le mémoire de Guillaume Amontons.
Annexe 2. Analyse du chapitre I de l'ouvrage de Coriolis.

1. Rappels de mécanique.

La mécanique classique nous enseigne qu'une force appliquée à un point matériel fournit un travail égal au produit de la force par le déplacement du point matériel si ce déplacement est colinéaire à la force. Plus généralement (en notant les vecteurs en **gras**), le travail δW d'une force vectorielle $\mathbf{F}$ appliquée à un point matériel subissant un déplacement vectoriel $d\mathbf{x}$ est égal au produit scalaire $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$.

Les forces qui s'appliquent sur un point matériel sont additives. Le principe fondamental de la dynamique stipule que si $\mathbf{F}$ désigne la résultante des forces qui s'appliquent sur un point matériel de masse m et de vitesse $\mathbf{v}$, on a la relation $\mathbf{F} = m \, d\mathbf{v}/dt$, $\mathbf{F}$ et $\mathbf{v}$ étant des fonctions du temps t .

Considérons maintenant un système de points matériels. Chaque point matériel étant susceptible de générer une force sur un autre point matériel, il convient de scinder les différentes forces en deux catégories: les forces intérieures au système, qui s'exercent entre points matériels, et les forces extérieures. Dans les problèmes pratiques que traite la thermodynamique, on n'aura pas généralement à considérer le mouvement d'ensemble des corps matériels. Cela vient du fait que les forces extérieures qui sollicitent ces corps se trouvent contrebalancées par des forces intérieures de résistance. L'effet consiste alors essentiellement en des déformations ou changements d'état.

On peut alors définir une notion fondamentale qui est le travail fourni à un système matériel: c'est le travail des forces extérieures, soit $\delta W = \sum \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{x}_i$.

Tout cela paraît simple et aller de soi pour qui a une formation même élémentaire en physique. Pourtant, les concepts et le vocabulaire ont mis du temps à trouver leur forme consensuelle. Les lois de la mécanique ont été formalisées dans les *Principia* de Newton, publiés en 1687. La notion de force ("vis impressa") est capitale et sert à formuler le travail qui est fourni à un système matériel. Mais le mot "travail" dans son sens actuel en physique n'est fixé qu'en 1829 par Coriolis: auparavant, on employait des formes ambiguës comme "puissance mécanique", "quantité d'action" ou "effet dynamique".

L'apport de Newton à la science est immense, mais pas loin d'un siècle avant lui Kepler avait compris que le mouvement des corps célestes était dû à des actions de la part d'autres corps, ce qu'il énonça sous forme de lois. Son travail fut lui-même précédé et préparé par les observations et les calculs de Copernic puis de Tycho-Brahé. Et c'est bien l'Astronomie, révolutionnée dès le XVI^{ème} siècle par ces esprits clairvoyants et courageux, qui permit l'émergence du concept de force. Cela mérite d'y consacrer quelques lignes.

2. Genèse de la notion de force mécanique.

C'est sans doute Kepler qui s'approcha le premier du concept moderne de force. Il énonça que le mouvement d'un corps non soumis à une influence quelconque s'exécutait en ligne droite: s'il change de direction, c'est que d'autres causes interviennent. Kepler avait compris que les corps s'attiraient en raison de leurs masses: la pesanteur qui fait tomber une pierre apparaît alors comme l'attraction mutuelle entre la pierre et la Terre. Il expliquait le phénomène des marées par l'attraction lunaire. Ces propos figurent dans son ouvrage *Astronomia Nova* consacré à l'étude du mouvement de la planète Mars et publié en 1609. Son travail acharné aboutit aux fameuses lois de Kepler régissant le mouvement des planètes.

Durant les siècles obscurs qui suivirent la fin de l'Antiquité jusqu'à la Renaissance, la description céleste reposait sur le modèle géocentriste: Lune, Soleil et étoiles tournaient autour de la Terre, dont la rotondité a fini par s'imposer sans trop de difficulté. L'harmonie de ce système était pourtant troublée par le cas de cinq étoiles particulières dont les révolutions apparaissaient irrégulières, avec des phases de rétrogradation. Ces "astres errants", d'où le mot "planète", étaient Mercure, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne, cette liste étant énoncée selon leur distance croissante au Soleil, qu'on ignorait bien évidemment à cette époque.

On tenta donc d'expliquer, ou plutôt de décrire ces irrégularités, en admettant que les planètes évoluaient non pas sur des orbites circulaires autour de la Terre, mais sur des orbites circulaires autour d'un point qui, lui, évoluait sur une orbite circulaire autour de la Terre. Ce système ingénieux d'épicycles fut élaboré par de grands mathématiciens comme Hipparque (II^{ème} siècle avant JC) qui disposaient des observations abondantes consignées depuis des siècles, notamment par les astronomes babyloniens. C'est Ptolémée⁽¹⁾ (II^{ème} siècle après JC) qui perfectionna le système géocentriste des épicycles auquel s'attacha définitivement son nom: il en résulta un instrument très utile aux astronomes et aux navigateurs.

Pourtant, certains avancèrent une explication héliocentriste qui se heurta à l'incompréhension voire l'indignation de leurs contemporains. Parmi eux, Aristarque de Samos⁽²⁾ (310-230 av. JC) postula que la Terre avait un double mouvement de translation et de rotation sur l'écliptique autour du Soleil. Il fut accusé d'impiété, et son système fut récusé durant près de deux millénaires.

Et on arrive donc au tout début du XVI^{ème} siècle à Copernic, jeune chanoine polonais épris de science, qui se convainc de la justesse du système héliocentriste, seule théorie capable de fournir une explication simple aux mouvements aberrants des planètes. A ce stade, Copernic s'inscrit dans la continuité d'Aristarque de Samos dont il connaissait les travaux, et se borne donc à améliorer les descriptions des mouvements planétaires. C'est pourtant beaucoup compte tenu des préjugés de l'époque, hostiles à toute philosophie révolutionnaire comme par exemple vouloir enlever à notre monde terrestre sa qualité de centre de l'univers. Et si l'aspect mécanique est absent du travail de Copernic, il n'en constitue pas moins une base indispensable.

Copernic ne posa pas son modèle comme un dogme en remplaçant un autre, héliocentriste au lieu de géocentriste. Il confronta son modèle à ses observations et dut reconnaître qu'il y avait des écarts. Mais, encore un peu prisonnier des besoins d'une harmonie primaire hérités des dogmes, il ne pouvait imaginer que le mouvement des astres ne soit autrement que circulaire. Il dut alors avoir recours, tout comme Ptolémée, à un système d'épicycles encore plus compliqué que celui de son prédécesseur. La différence était néanmoins qu'il s'agissait alors de corriger des écarts et non l'aspect principal bien reproduit par le modèle héliocentriste.

Copernic⁽³⁾ avait transmis son travail à ses collaborateurs qui assurèrent sa diffusion à travers l'Europe. Mais il hésita longtemps à le publier, et ce ne fut qu'en 1543 juste avant de mourir qu'il fit éditer son ouvrage *De Revolutionibus orbium coelestium*. Bien qu'encouragé par des amis proches, un cardinal et un évêque, Copernic redoutait que ses idées ne suscitent la réprobation de la part des autorités spirituelles qui ne pouvaient accepter que le mouvement diurne des astres soit dû à la rotation de la Terre et que celle-ci ne soit plus le centre du monde. Il le dit dans l'introduction de son ouvrage, ajoutant qu'il a attendu 36 ans avant de le faire publier et le dédiant au pape en exercice, Paul III ! A vrai dire, la réaction ecclésiastique ne fut pas immédiate mais néanmoins violente puisque le livre de Copernic fut condamné le 5 mars 1616 car "renfermant des idées (...) sur le mouvement de la Terre contraire à la Sainte Ecriture".

Après Copernic apparaît un grand nom dans la science astronomique: Tycho-Brahé. Son apport fut moins dans la théorie que dans le domaine de l'observation. Ses conceptions marquent un recul par rapport à Copernic dont il ne retint que l'idée que les planètes tournaient autour du Soleil, mais pas la Terre, qui restait bien le centre du monde, le Soleil tournant autour d'elle. Mais Tycho-Brahé fut avant tout un observateur du ciel méticuleux, n'hésitant pas à modifier et améliorer ses instruments. A sa mort (1601), il laissait une immense base de données d'observation que continua son assistant Kepler dont le travail aboutit à un corpus appelé *Tables Rodolphines* publiées en 1627.

Kepler⁽⁴⁾ sut dégager son esprit des brumes intellectuelles de l'époque, s'appuyant sur les observations de Tycho-Brahé et celles qu'il fit lui-même. Fermement convaincu de l'héliocentrisme, il comprit la nécessité de s'affranchir du dogme imposant aux orbites planétaires d'être circulaires. Une analyse fine des données disponibles, surtout concernant le mouvement de la planète Mars, conduisit à une première découverte qu'il appela la loi des aires: le rayon vecteur joignant le Soleil à Mars embrassait une aire constante pour une unité de temps donnée. Il pensait que cette forme du mouvement était due à une force d'attraction du Soleil de même nature que la force d'attraction magnétique. Il estimait aussi que c'est le même type de force qui fait que les objets sont attirés par la Terre et tombent au sol. Puis à l'issue d'un travail fastidieux où il prit plusieurs points de l'orbite de Mars, Kepler finit par trouver, après avoir perdu beaucoup de temps et d'énergie à cause d'erreurs de calcul, que la planète décrivait en fait une ellipse dont le Soleil occupait un foyer.

Kepler a relaté la découverte de ces deux premières lois dans *Astronomia Nova* (1609), ouvrage où il défend en outre l'idée que le Soleil tourne autour de son axe. Pour la petite histoire, elles furent ultérieurement numérotées dans l'ordre inverse de leur découverte, la loi de l'ellipse devenant la première loi de Kepler et la loi des aires la seconde. Plus tard, à l'issue de calculs compliqués, Kepler découvre (exactement le 15 mai 1618 selon ses propres écrits) que le carré des révolutions est proportionnel au cube des distances. Il en donne l'histoire dans *Harmonices mundi libri* (1619). Ce qui s'appellera la troisième loi de Kepler s'écrit donc en formalisme moderne

$$T^2 / a^3 = k$$

où T est la durée de la révolution, a la longueur du demi grand axe de l'orbite elliptique et k une constante identique pour toutes les planètes.

Pendant que l'astronomie devenait une science rationnelle, cherchant à donner aux mouvements célestes des explications respectant les faits d'observation, un professeur de mathématiques et d'astronomie dépendant de l'Etat vénitien, Galilée⁽⁵⁾, fervent défenseur du système copernicien, multiplie des observations devenues célèbres qui ont jeté les bases de ce qui va devenir la science mécanique. Son premier fait d'armes fut la découverte de l'isochronie du mouvement pendulaire à la suite d'une observation fortuite en 1583 alors qu'il n'avait que 19 ans. Il se livra à de multiples travaux dans les domaines les plus variés (thermoscopes, lunettes astronomiques, etc).

On connaît son expérience la plus fameuse en lançant du haut de la tour de Pise des objets de poids différents qui atteignaient le sol en même temps. Il mit à mal les enseignements d'Aristote qui prônaient que les objets tombent d'autant plus vite qu'ils sont lourds et acquièrent une vitesse proportionnelle à la hauteur de chute. Galilée montra au contraire que le poids n'intervenait pas et que la vitesse acquise était proportionnelle au temps, en fait que la hauteur de chute variait avec le carré du temps de chute. Il fallait bien sûr expliquer pourquoi des objets légers, par exemple des plumes, tombaient plus lentement. Il mit ce phénomène sur le compte de la résistance de l'air, ce qu'avait déjà pressenti Lucrèce (Ier s. av. JC) qui affirmait que dans le vide, tous les objets tomberaient avec la même vitesse. Pour surmonter la difficulté de mesurer des mouvements de chute libre, Galilée eut l'idée de faire rouler ou glisser les objets étudiés sur des plans inclinés: selon l'angle, l'accélération demeurait constante mais moindre, ce qui facilitait les mesures et en même temps diminuait la résistance de l'air liée à la vitesse.

On ne s'attardera pas ici sur les persécutions dont furent victimes ceux qui remettaient en cause le rôle de centre du monde de notre planète (1600: mort de Giordano Bruno sur le bûcher; 1616: condamnation du livre de Copernic; 1633: abjuration forcée de Galilée; etc⁽⁶⁾). Grâce à tous leurs travaux, un physicien de génie, Newton, a bâti la Mécanique moderne en partant du principe que la gravité qui attire les objets vers le sol et les mouvements des planètes et de leurs satellites sont régis par une loi universelle. Sans que cela n'amoindrisse la portée de son immense travail, on notera que Newton bénéficia à la fois du saut conceptuel accompli par Kepler en matière de force à distance et d'un environnement bien moins tracassier que celui de ses prédécesseurs. Son oeuvre, les *Principia*, est publiée en 1687. Il érige en principes les trois lois qui portent son nom.

La première loi de Newton est la loi d'inertie: tout corps reste dans l'état de repos ou en mouvement rectiligne uniforme si aucune force n'agit sur lui.

La deuxième loi est le principe de la dynamique de translation: les changements dans un mouvement sont proportionnels à la force motrice et sont dirigés dans le sens de la force.

La troisième loi est le principe de l'action et de la réaction: les actions de deux corps l'un sur l'autre sont égales et de sens contraires.

3. Genèse de la notion de travail mécanique.

Mesure du rapport entre la force humaine et la force d'un cheval (1668).

Avant même que Newton ne formalise la mécanique, on avait bien compris que le concept de force n'est intéressant qu'à travers les effets qu'ont les forces sur les objets, c'est-à-dire les mettre en mouvement. Et pour cela, on voyait confusément qu'il fallait disposer d'une mesure de ces effets. Une expérience peu connue se déroula le 3 juillet 1668, sur le site de l'Observatoire en construction. La toute jeune Académie Royale des Sciences voulait comparer les performances des hommes et des chevaux⁽⁷⁾. Avec un matériel adéquat comprenant grue et poulies, on constata qu'un cheval robuste fut capable d'élever un poids de 401 livres avec assez de peine. Avec une certaine imprécision, on constata qu'il fallait 7 hommes pour soulever le même poids. On notera qu'une expérience similaire réalisée en Angleterre aboutissait à une équivalence de 5 hommes pour un cheval ! Malgré les imprécisions, ce sont là les premières expériences réellement scientifiques donnant une idée du rapport d'équivalence entre la capacité mécanique d'un homme et celle d'un cheval.

Le Mémoire de Guillaume Amontons (1699).

Parmi les Mémoires de l'Académie Royale pour l'année 1699 figure une contribution de Guillaume Amontons consacrée au fonctionnement d'un moulin à feu, sorte d'immense roue dont le mouvement est entretenu par des transferts d'eau poussés par des masses d'air contenues dans des cellules périphériques alternativement chauffées puis refroidies. On trouvera en Annexe 1 un résumé de ce texte. L'intérêt historique de ce Mémoire n'est pas tant la description d'un dispositif ingénieux mais plutôt le concept de "puissance continue" qui permet de donner une mesure commune des efforts nécessaire au fonctionnement d'ouvrages de nature très différente. Cette mesure, c'est le poids qu'un cheval (ou un homme) peut déplacer sur une certaine distance durant un certain temps. Ainsi, la puissance continue d'un cheval est égale à 60 livres sur une lieue par heure. Celle d'un homme est de 12 livres 1/2 pour 3/4 de lieues par heure. On notera que ce rapport vaut 6.4, peu éloigné du résultat de 1668.

Pour le physicien moderne, la puissance continue d'Amontons est définie comme une force multipliée par un déplacement et divisée par une durée: elle est donc homogène à une puissance. Mais le paramètre durée semble ici très secondaire et standardisé à la valeur d'une heure. Les deux paramètres fondamentaux sont la force et le déplacement dur lequel elle s'exerce. Néanmoins, la conception d'Amontons est encore très emprunte d'anthropomorphisme puisque l'évaluation de la puissance continue d'un homme (ou d'un cheval) tient compte des temps morts (repos, sommeil, etc).

La puissance motrice de Carnot (1824).

Dans son célèbre ouvrage qu'on détaillera ultérieurement, Carnot désigne par puissance motrice l'effet utile qu'un moteur est capable de produire, c'est-à-dire sa capacité d'élever à une certaine hauteur un objet d'un certain poids. Dans une note⁽⁸⁾, Il définit très explicitement cette puissance motrice comme le produit du poids par la hauteur. Dans le cadre de ses calculs⁽⁹⁾, Carnot exprime cette puissance motrice en mètres cubes d'eau élevés de un mètre de hauteur.

Définition du travail par Coriolis (1829).

Il faut attendre 1829 pour que soit précisée la définition moderne du travail mécanique. Auparavant, on usait d'expressions ambiguës comme la quantité d'action, la puissance mécanique, l'effet dynamique, etc. C'est dans son ouvrage *Du calcul de l'effet des machines*, et plus particulièrement dans le premier chapitre analysé en Annexe 2, que Gustave Coriolis propose sa définition. Il part d'un système de points matériels représentant des liaisons. Chaque point est soumis d'une part à des forces intérieures qui s'annulent deux à deux (égalité de l'action et de la réaction) et d'autre part à des forces données (nous dirions forces extérieures). Sous l'action de toutes ces forces, les points matériels décrivent des chemins. En décomposant la force donnée (= extérieure) en composante selon la tangente au chemin parcouru et en composante normale à ce chemin, Coriolis relève l'importance de l'intégrale $\Sigma(\int \mathbf{P} \, ds)$: la sommation porte sur tous les points matériels d'un système, chacun suivant un chemin dont la différentielle est notée ds et où P est la composante tangentielle de la force extérieure qui s'applique au point. Avec les notations scalaires pas encore apparues à l'époque, nous écrivions $\Sigma(\int \mathbf{P} \, ds)$. L'importance de cette quantité vient de l'équation des forces vives qui s'écrit (notations modernes)

$$\Sigma \int \mathbf{P} \, ds = \Delta [\Sigma (1/2 mv^2)]$$

Coriolis (p.17) propose le terme "travail" pour des termes comme $\int \mathbf{P} \, ds$ à la place des expressions antérieurement utilisées et peu satisfaisantes. Ce concept associe une force et un chemin. De plus, puisque le travail des forces extérieures mesure la variation de la quantité $\Sigma (1/2 mv^2)$, coriolis propose de réserver le nom de force vive aux quantités $1/2 mv^2$, terme qui jusqu'à ce moment désignait les quantités mv^2 .

4. Travail reçu, travail fourni.

La thermodynamique est née avec le besoin de compréhension du fonctionnement des machines à vapeur ou autres machines thermiques. Il était alors tout-à-fait naturel de dire qu'on fournissait de la chaleur à la machine, et celle-ci en retour fournissait un certain travail par l'intermédiaire de dispositifs tels que des pistons qui permettaient de mettre en mouvement divers objets. Mais depuis qu'on sait que travail et chaleur sont deux modes d'échanges d'une grandeur conservative qui est l'énergie, il paraît légitime de dire que le système reçoit du travail ou de la chaleur lorsqu'il s'agit d'un échange qui fait augmenter l'énergie du système, et de dire qu'il fournit du travail ou de la chaleur lorsqu'il perd de l'énergie.

Nous reviendrons dans un prochain chapitre sur la façon de compter les échanges de chaleur, mais nous pouvons donner ici une définition rigoureuse du travail reçu par un système. Les systèmes que nous aurons à considérer sont des systèmes matériels, autrement dit des ensembles de points matériels. On gardera toujours à l'esprit qu'un tel système de points est une construction abstraite représentative d'un système réel dont elle constitue une modélisation. Le contenu matériel d'un tel système pourra se trouver sous forme de points discrets (c'est-à-dire séparés) mais aussi sous forme distribution linéique, surfacique ou volumique, ce qui se traduira mathématiquement à des sommations simples, ou des intégrations simples, doubles ou triples. Donc, quand on parlera d'un point matériel, il s'agira selon le cas d'un objet ponctuel (sans dimension) ou d'une étendue spatiale élémentaire (linéique, surfacique, volumique).

La définition du travail reçu par un système repose sur le préalable qu'on sait définir les forces intérieures et les forces extérieures auxquelles il est soumis. Les forces intérieures d'un système mécanique sont les forces qu'exercent les uns sur les autres les points matériels constitutifs du système. Lorsqu'une force s'exerce sur un point matériel du système n'est pas due à un autre point matériel du même système, alors il s'agit d'une force extérieure. Une force extérieure peut apparaître comme directement issue d'un point matériel n'appartenant pas au système, mais aussi sous d'autres formes comme par exemple un champ (gravitation, etc).

On peut maintenant donner la définition du travail reçu par un système au cours d'une action mécanique élémentaire: c'est le travail de toutes les forces extérieures sur les points matériels du système. Selon la nature spatiale du point matériel, on peut toujours représenter une force sous forme ponctuelle ou sous forme de densité et exprimer le travail élémentaire sur le point matériel considéré sous la forme

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \quad \delta^2 W = \mathbf{F}_{\text{lin}} dL \cdot d\mathbf{x} \quad \delta^3 W = \mathbf{F}_{\text{surf}} d^2 S \cdot d\mathbf{x} \quad \delta^4 W = \mathbf{F}_{\text{vol}} d^3 V \cdot d\mathbf{x}$$

On notera qu'un tel travail élémentaire est positif lorsque le déplacement $d\mathbf{x}$ est dans le même sens que la force et contribue alors positivement au travail reçu par le système. Si au contraire le déplacement recule par rapport à la force, alors le travail élémentaire apporte une contribution négative. Donc, le travail reçu par un système a une signification algébrique. Bien entendu, lorsque le déplacement est nul ou normal à la force, le travail fourni par cette force est nul.

Selon la nature du système mécanique, on sera amené à une grande variété de modélisations des actions mécaniques qui seront détaillées dans les chapitres adéquats.

Ainsi, un fil élastique subissant une elongation élémentaire dL sous l'action d'une force de traction ponctuelle F appliquée à une extrémité reçoit un travail $W = F dL$. Une membrane subissant une augmentation de surface dA sous l'action d'une force linéique λ constante appliquée sur son bord reçoit en chaque point de ce bord un travail $\delta W = \lambda dA$. On trouve de la même façon qu'un fluide de volume V soumis à une pression constante p reçoit un travail égal à $-p dV$.

Pour certains systèmes, il faudra introduire des forces à distance s'exerçant sur les volumes élémentaires. Ce sera évidemment le cas de corps soumis à la gravitation. De même, le travail des forces électriques ou magnétiques nécessite des modélisations particulières.

5. Le renouvellement métrologique des années 1790.

Amontons, en 1699, pour mesurer ce qu'il appelait la puissance continue d'une machine, exprimait les poids en livres et les longueurs en lieues. En 1824, Carnot exprimait ces mêmes grandeurs respectivement en mètres et en mètres cubes d'eau, utilisant les unités du système décimal mis en place trois décennies plus tôt.

Conscient des besoins de la science en matière de mesures précises, le gouvernement révolutionnaire français avait décidé d'en finir avec les multiples unités en usage avec souvent une même dénomination à signification variable d'une région à l'autre. On savait que la physique reposait sur trois grandeurs indépendantes, le temps, la longueur et la masse (qu'on distinguait du poids depuis Newton). Les unités de temps étaient clairement et universellement définies par rapport à la durée du jour, mais pour ce qui concernait les longueurs et les masses, les unités en usage étaient trop disparates pour qu'on puisse s'en contenter.

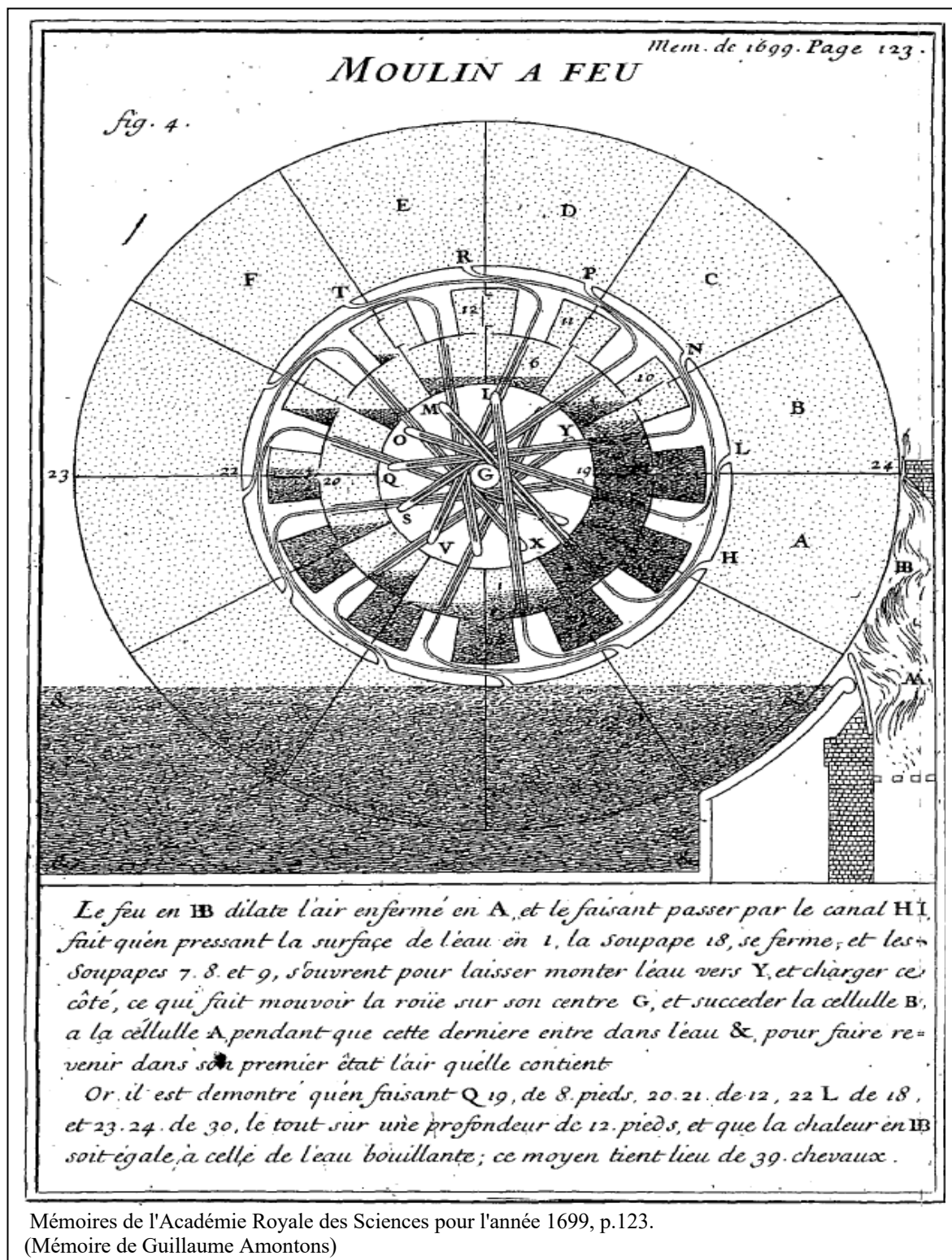
Dans un premier temps, les autorités adoptent notamment la définition du mètre comme étant la dix-millionième partie du demi-méridien allant du pôle nord à l'équateur et passant par Dunkerque. Le 19 mars 1791, sous la direction de Condorcet, un rapport sur le choix d'une unité de mesure de longueur est lu à l'Académie des Sciences avec la mention "Imprimé sur ordre de l'Assemblée Nationale"⁽¹⁰⁾. Le système métrique décimal est officiellement mis en place par la loi du 18 germinal an III (17 avril 1795) qui confirme la définition du mètre et définit le gramme comme le poids absolu d'un centimètre cube d'eau pure⁽¹¹⁾.

Résumé.

1. La notion de force est à la base de la Mécanique. Une force (vectorielle) $\mathbf{F}$ dont le point d'application subit un petit déplacement $d\mathbf{x}$ fournit un travail égal au produit (scalaire) $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$.
2. Copernic et Kepler, aux XVIème et XVIIème siècles, ont révolutionné l'Astronomie en faisant du Soleil le centre des mouvements planétaires. Kepler a compris que les planètes décrivent des ellipses dont le Soleil occupe un foyer. Par la suite, Newton (1687) établit les principes de la Mécanique.
3. Les contributions d'Amontons (1699), de Carnot (1824) et de Coriolis (1829) marquent le cheminement qui a abouti à la notion moderne du travail mécanique.
4. Le travail reçu ou fourni par un système est le travail des forces extérieures s'exerçant sur les diverses parties du système.
5. Dans les années 1790, le gouvernement révolutionnaire de la France renouvelle le système des unités de base de la physique, définissant le mètre et le gramme.

Annexe 1. Le Mémoire de Guillaume Amontons.

Le Mémoire de Guillaume Amontons *Moyen de substituer commodément l'action du feu à la force des hommes et des chevaux pour mouvoir les machines* est paru dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de 1699. L'exposé, assez embrouillé et parfois inintelligible, a été analysé de façon exhaustive dans la thèse de Yannick Fontenau soutenue en 2011⁽¹²⁾.



En préambule (p.112-113), l'auteur expose l'idée que le feu n'a pas nécessairement une action destructrice mais peut faire mouvoir les machines tout comme les hommes et les chevaux. Le tout est de trouver un moyen de l'utiliser correctement, et c'est ce qui est proposé dans la dernière partie du Mémoire (p.122-126) consacrée à un dispositif appelé le moulin à feu. Il s'agit d'une immense roue comportant en périphérie deux couronnes de cellules. Les plus éloignées contiennent de l'air qui est chauffé lorsque la cellule courante plonge dans de l'eau bouillante. Un jeu de tuyaux et de soupapes fait que l'air chauffé se dilate et est poussé l'eau contenue dans une cellule de la couronne plus intérieure vers la cellule suivante de cette couronne. Ce faisant, l'eau transvasée joue le rôle d'un contrepoids qui oblige la roue à tourner. Du coup, la cellule extérieure quitte le réservoir d'eau bouillante et se refroidit, et c'est la cellule suivante de sa série qui la remplace, ce qui permet au cycle de recommencer, et ainsi de suite.

Cette description est précédée de la description de six expériences destinées à valider et quantifier les phénomènes physiques en jeu. Les deux premières expériences (p.113-117) montrent comment de l'air emprisonné dans une boule chauffée par de l'eau bouillante pousse le mercure contenu dans un tube ouvert sur la pression atmosphérique. Les deux expériences suivantes (p.117-119) sont faites avec un dispositif comprenant un récipient contenant de l'air et un autre contenant de l'eau. Ce dernier subit la pression de l'air du premier réservoir par un tuyau et communique lui-même avec un autre réservoir situé au-dessus. En chauffant l'air du premier réservoir, celui-ci pousse l'eau du second réservoir vers le troisième. Ces expériences donnent aussi les temps de chauffe et de montée ainsi que les temps de descente lorsque l'air est froid.

La cinquième expérience (p.119-120) conduit à une équivalence entre force humaine et force d'un cheval. On considère une machine où 5 hommes déploient chacun une force de 200 livres, soit 1000 au total. On les a remplacés par des chevaux. On évalue que pour faire le travail jour et nuit, il aurait fallu 16 chevaux faisant 1 lieue par heure avec une puissance continue de 60 livres. Le texte ne donne pas explicitement la distance parcourue par l'attelage humain, mais on voit apparaître l'expression "puissance continue".

Dans la sixième expérience (p.120-122), la puissance continue d'un homme est estimée à partir du travail des polissoirs des glaces. L'intérêt de ce travail est que la force qu'on évalue est entièrement utilisée à surmonter les frottements. Tenant compte des temps de pause, on arrive à une puissance continue de 12 livres 1/2 pour un déplacement cumulé de 3/4 de lieues par heure. Si on rapporte la puissance continue d'un cheval à celle d'un homme, on arrive à un rapport d'environ 6.

Revenant à la dernière partie du Mémoire, l'auteur expose la trame des calculs permettant d'estimer la force tangentielle qu'il faudrait appliquer à la roue pour qu'elle tourne: il arrive à 9428 livres 4/7. Elle s'exerce sur une distance d'environ 30 pieds (le rayon de 5 pieds multiplié par 2π , ce que ne précise pas l'auteur) en 36 secondes. Bref, l'auteur calcule qu'elle équivaut à 39 chevaux ou 234 hommes. Le détail du calcul n'est pas donné, mais on peut le reconstituer ainsi

- puissance continue d'un cheval: 60 livres x 1 lieue / heure

- puissance continue nécessaire au moulin: 9 428 livres x 30 pieds / 36 secondes

= 9428 livres x 3000 pieds / heure = 9428 livres x 1/4 lieue / heure (1 lieue = 12 000 pieds)

On a bien $9428 \times 3/4 / 60 = 39$.

Annexe 2. Analyse du chapitre I de l'ouvrage de Coriolis.

C'est dans l'ouvrage *Du calcul de l'effet des machines* de Gustave Coriolis publié en 1829 qu'apparaît le mot travail dans son sens moderne de grandeur mécanique. Voici un résumé des articles de son chapitre I où Coriolis définit la notion de travail comme le produit d'une force par une distance.

*) Art.1 (p.1-2). Nous nous intéressons aux machines du point de vue dynamique c'est-à-dire en considérant à la fois les forces et le mouvement.

*) Art.2 (p.2-3). Les forces que nous considérerons sont celles comme les poids, les pressions, les tensions ou les tractions. Elles modifient les mouvements non de façon instantanée mais en passant par tous les intermédiaires possibles ($\Leftrightarrow$ *continue*).

*) Art.3 (p.3-4). La dépendance entre force et mouvement obéit aux lois suivantes.

- Loi d'inertie: un corps ne peut modifier son mouvement que s'il est soumis à une force.

- Les variations de vitesse sont proportionnelles aux forces.

- Loi d'indépendance entre le mouvement acquis et l'effet des forces. Cela signifie que si on considère le mouvement du corps supposé immobile au départ, ou si on considère le mouvement dans un système d'axes lié au mouvement qu'aurait eu le corps avec sa vitesse initiale sans les forces, on obtient dans les deux cas le même mouvement.

- Pour produire un même accroissement de vitesse en un temps donné ($\Leftrightarrow$ *accélération*) à deux corps donnés, il faut des forces proportionnelles à leur masses, c'est-à-dire, pour un même lieu sur terre, à leur poids.

*) Art.4 (p.4-5). Ces lois fondent la dynamique du point matériel. La loi du mouvement s'écrit pour une force F variable

$$dv/dt = F/p$$

g est l'accélération de la pesanteur et p le poids. Donc $p/g = m$ est la masse. Pour un mouvement courbe, on décompose sur la tangente et sur la normale.

*) Art.5 (p.5-6). Commentaire sur les forces qui, combinées, ne produisent aucun effet, comme deux forces agissant sur un levier et proportionnelles à leur distance au point fixe.

*) Art.6 (p.6-8). Paragraphe consacré aux liaisons, lorsque par exemple lorsque les points d'une partie du corps présentent des relations géométriques indépendantes du temps (forme géométrique figée).

*) Art.7 (p.8-10). Dans un système de points soumis à des liaisons, par exemple un système de poids où des verges relient certains d'entre eux, les poids décrivent des trajectoires compliquées qu'ils n'auraient pas si chacun était soumis à la seule force de son poids indépendamment des autres. C'est parce que la forces totales qui s'exercent sur les points matériels sont la somme des forces données (les poids) et des forces de liaison.

*) Art.8 (p.10-11). Rappel de ce qu'on appelle vitesses virtuelles. Etant donné un système de points mobiles avec des liaisons, des vitesses virtuelles sont des petits déplacements de chacun, compatibles avec les liaisons. Peu importe la valeur de ces vitesses, ce qui importe, ce sont les rapports qu'elles ont entre elles. Etant donné une force agissant sur un point ayant une vitesse virtuelle, le travail virtuel élémentaire (appelé moment virtuel par des géomètres) est le produit de la composante de la force selon la vitesse virtuelle par la vitesse virtuelle elle-même ($\Leftrightarrow$ *produit scalaire*).

*) Art.9 (p.11-12) Pour que deux systèmes de forces soient équivalents, il faut que la somme des travaux virtuels soient égales.

*) Art.10 (p.12). A l'aide de ce principe, on tire autant d'équations qu'on peut tirer de systèmes de vitesses virtuelles lui-même égal au nombre de coordonnées qu'on veut trouver en fonction du temps.

*) Art.11 (p.12-13). Ce principe permet d'obtenir l'équation des forces vives. On choisit pour vitesses virtuelles les chemins élémentaires réellement décrits par les points mobiles.

*) Art.12 (p.13-14). (*On prend des notations modernes*) Un point mobile subissant la force totale subit un déplacement $\mathbf{e}$. Le travail virtuel élémentaire est alors

$$m d^2\mathbf{e}/dt^2 \cdot \mathbf{e}$$

Pour les forces $\mathbf{P}$ en certains points subissant un déplacement $d\mathbf{s}$, on aura un travail élémentaire donné par $\mathbf{P} \cdot d\mathbf{s}$.

On peut ici supprimer le mot "virtuel" puisqu'il s'agit dans ce cas du déplacement réel du point.

*) Art.13 (p.14-15). On aura donc $\sum \mathbf{P} \, d\mathbf{s}$ pour les forces données et $\sum d^2\mathbf{e}/dt^2 \, \mathbf{e}$ pour les forces totales pour l'ensemble des points. Comme les deux systèmes de vitesses virtuelles sont équivalentes, on a en vertu du principe des vitesses virtuelles

$$\sum \mathbf{P} \, d\mathbf{s} = \sum d^2\mathbf{e}/dt^2 \, \mathbf{e}$$

En intégrant, on trouve (*notations actuelles*)

$$\sum \int \mathbf{P} \, d\mathbf{s} = \Delta (1/2 \, mv^2)$$

C'est l'équation des forces vives.

*) Art.14 (p.15-16). On a donné divers noms à l'intégrale $\int \mathbf{P} \, d\mathbf{s}$.

*) Art.15 (p.16). Commentaire sur la projection d'une force sur une direction (*en fait on explicite le produit scalaire*).

*) Art.16 (p.16-17). On propose le mot "travail" pour désigner $\int \mathbf{P} \, d\mathbf{s}$. Il correspond à la réunion de deux éléments: chemin et force.

*) Art.17 (p.17-18). On propose l'expression "force vive" à $1/2 \, mv^2$ et non à mv^2 comme on le faisait jusque là. L'augmentation de la force vive apparaît alors comme le travail du poids sur la hauteur de son chemin.

*) Art. 18 (p.18). Entre deux instants où les vitesses finales ont repris leurs valeurs initiales, on a donc

$$\sum \int \mathbf{P} \, d\mathbf{s} = 0$$

autrement dit, les quantités de travail dues aux forces mouvantes ($\Leftrightarrow$ *motrices*) sont égales à celles des forces résistantes.

*) Art.19 (p.18-19). Cas où le mouvement est initialement nul et où il n'y a que des forces motrices. Cas où le mouvement est finalement nul et où il n'y a que des forces de résistance.

*) Art. 20 (p.19-20). L'équation des forces vives ne suppose pas la continuité des forces.

*) Art. 21 (p.20-22). Il faut prendre soin de considérer les points matériels qui composent le système soient les mêmes au début et à la fin du mouvement.

*) Art.22 (p.22-23). Si on distingue dans les forces données celles qui sont motrices (travail positif) de celles qui sont résistantes (travail négatif), on est souvent dans le cas où leur différence est minime, égale à la différence des forces vives $\Delta (1/2 \, mv^2)$.

*) Art.23 (p.23-25). On montre que s'il n'y a pas de frottement, le travail moteur reçu par une machine est égal au travail résistant produit par cette machine.

*) Art.24 (p.25-26). On voit que la force vive $1/2 \, mv^2$ n'est autre que le travail disponible possédé par un corps.

*) Art. 25 (p.26-27). On ne peut augmenter la quantité de travail que produit une machine. Celle-ci se conserve en l'absence de frottements. Les frottements ont pour effet de l'anéantir.

*) Art.26 (p.27-30). Les machines ne font donc qu'utiliser le travail sans pouvoir l'augmenter. Elles l'économisent au mieux. Le travail résistant sans frottement peut être utile.

*) Art.27 (p.30). Pour évaluer une machine, il faut partir du travail moteur qui peut être produit. Partant de là, des modifications peuvent être apportées (pour limiter les frais d'entretien, pour limiter les frottements).

*) Art.28 (p.30-31). L'évaluation du travail pour une machine est, en terme économique, analogue à l'évaluation du volume pour certaines matières.

*) Art.29 (p.31-32). On peut objecter que la notion de temps n'apparaît pas dans celle du travail. Mais si on veut obtenir un certain résultat avec une certaine machine en un temps deux fois plus court, il suffit d'utiliser deux machines identiques. Au final, la production et la quantité de travail consommé seront les mêmes.

*) Art.30 (p.32-33). Le mot "travail" est finalement bien adapté.

*) Art.31 (p.33-34). Une unité de travail adéquate pourrait recevoir le nom de dynamode: un poids de 1000 kilogrammes parcourant 1 mètre.

*) Art.32 (p.34-35). Il faut bien prendre soin de désigner par travail le produit d'une force par le chemin seulement lorsque la force est dans le même sens que le chemin.

Bibliographie.

- *) [Copernic 1543] **Nicolas Copernic** *De revolutionibus orbium coelestium* (Nuremberg 1543).
- *) [Kepler 1609] **Johannes Kepler** *Astronomia Nova* (1609).
- *) [Kepler 1619] **Johannes Kepler** *Harmonices mundi libri* (Linz 1619).
- *) Newton 1687] **Isaac Newton** *Philosophiae naturalis Principia mathematica* (Londres 1687).
- *)[Amontons 1699] **Guillaume Amontons** *Moyens de substituer commodément l'action du feu à la force des hommes et des chevaux (...)* (Mémoires de l'Académie Royale des Sciences année 1699 p.112-126).
- *) *Rapport sur le choix d'une unité de mesure* lu à l'Académie des Sciences (19 mars 1791).
- *) [Loi 18 germinal an 3] *Loi relative aux poids et mesures* (an III n°135 loi du 18 germinal an III = 17 avril 1795).
- *)[Carnot 1824] **Sadi Carnot** *Réflexions sur la puissance motrice du feu* (Paris 1824).
- *)[Coriolis 1829] **Gustave Coriolis** *Du calcul de l'effet des machines* (Paris 1829).
- *)[Hoefer 1872] **Ferdinand Hoefer** *Histoire de l'astronomie* (Hachette, Paris 1872).
- *)[Fonteneau 2011] **Yannick Fonteneau** *Développement précoce du concept de travail mécanique* (Thèse de l'Université Claude Bernard, Lyon 2011 (révisée 2013)).

Notes.

- 1) Hoefer 1872 p.208 chap. XI et notamment p.218-220.
- 2) *ibid.* p.144-150.
- 3) *ibid.* p.293-309.
- 4) *ibid.* p.341 chap. IV et notamment pour les lois de Kepler p.355-365.
- 5) *ibid.* p.373 chap. V.
- 6) Voulant éviter de finir comme Giordano Bruno, brûlé vif pour avoir persisté dans sa conviction héliocentriste, Galilée (*ibid.* p.382-387) dut subir l'humiliation de prononcer à genoux l'abjuration solennelle de ses idées, à Rome le 22 juin 1633. Il n'en continua pas moins avec un peu plus de discrétion ses travaux scientifiques et parvint à faire imprimer en Hollande son traité de mécanique.
Kepler (*ibid.* p.346) fut victime des invectives de milieux catholiques qui l'accusaient d'être fils d'une sorcière. Il avait dû en effet se rendre en 1620 à Stuttgart et obtenir l'intercession du duc de Wurtemberg pour éviter une fin atroce à sa mère, accusée de sorcellerie. Fatigué, malade et écoeuré, Kepler mourut en 1630 à cinquante-neuf ans, n'ayant pu récupérer les sommes qui lui étaient dues.
Voilà comment on traitait les personnages fondateurs de la science moderne.
- 7) Fonteneau 2011 p.64-65.
- 8) Carnot 1824 p.6 n.1. "l'effet utile qu'un moteur est capable de produire (...) peut toujours être assimilé à l'élévation d'un poids à une certaine hauteur; il a; comme on sait, pour mesure le produit du poids multiplié par la hauteur (...)"
- 9) *ibid* p.80.
- 10) Le 19 mars 1791, sous la direction de Condorcet, un rapport de douze pages sur le choix d'une unité de longueur est lu à l'Académie des Sciences avec la mention "Imprimé sur ordre de l'Assemblée Nationale". Les auteurs expliquent pourquoi ils préfèrent se baser sur un méridien plutôt que sur la longueur du pendule dont la demi-période est égale en France à la seconde (on sait, avec la définition actuelle du mètre, qu'elle vaut 99.4 cm), mais trop variable en latitude du fait de l'aplatissement polaire du globe terrestre. Le choix du méridien qui passe par Dunkerque et Barcelone est argumenté: on le mesure entre ces deux villes qui ont l'avantage d'être au niveau de la mer, d'encadrer le parallèle 45° tout en représentant une distance suffisante pour pouvoir obtenir par extrapolation avec une très bonne précision la mesure totale du demi-méridien.
- 11) [loi 18 germinal an 3] L'article V stipule que le mètre est "la dix-millionième partie de l'arc du méridien terrestre compris entre le pôle boréal et l'équateur". On y trouve aussi la définition de l'are (superficie d'un carré de dix mètres de côté) et du litre (volume d'un cube de dix centimètres de côté). Enfin, l'unité de poids devient le gramme, "poids absolu d'un volume d'eau pure, égal au cube de la centième partie du mètre, et à la température de la glace fondante". En fait, les conditions de température seront ultérieurement fixées à 4°C.
- 12) Fonteneau *ibid.* p.147-164. Son travail permet entre autre de retrouver les calculs que Guillaume Amontons n'a pas vraiment explicité.