

1.3. Température.

Sommaire.

1. La perception immédiate du chaud et du froid.
 2. Définition de la température.
 3. Principe de l'équilibre thermique.
 4. Echelle de température.
 5. Les premiers dispositifs thermométriques chez les Anciens.
 6. Les thermoscopes et les thermomètres au XVIème et XVIIème siècles.
 7. Les problèmes de cohérence entre thermomètres.
 8. L'identification des points fixes.
 9. Les thermomètres du XVIIIème siècle.
 10. La recherche d'une échelle absolue de température.
- Résumé.
Bibliographie.
Notes

1. La perception immédiate du chaud et du froid.

La perception sensorielle du chaud et du froid nous est familière. En touchant un objet, en mastiquant un mets, en ressentant l'air environnant, on saura dresser une catégorisation thermique allant du très chaud au très froid en passant par le tiède ou le frais.

Mais nos organes, nous le comprenons, ne sont pas infaillibles. Une main préalablement trempée dans de l'eau très chaude et l'autre dans de l'eau très froide fourniront à notre cerveau des indications différentes lorsqu'on les plongera dans une même bassine d'eau tiède. Deux personnes auront des perceptions légèrement différentes pour classer des objets dont les intensités de chaud ou de froid sont assez proches. De plus, nos organes ne peuvent aller sans dommage au-delà d'une limite de chaud ou de froid, mais nous concevons que, pour ces intensités thermiques mettant en danger l'intégrité de nos organes, les corps continuent quand même d'être plus ou moins chauds les uns par rapport aux autres.

2. Définition de la température.

L'observation immédiate nous révèle facilement des propriétés de ce que nous appelons le chaud et le froid. Ne considérons d'abord que des corps dont l'état de chaleur, appelons ça l'état thermique, est à peu près homogène en chacune de ses parties.

Lorsque les états thermiques de deux corps sont suffisamment différents pour que nous les distinguions, nous savons dire lequel est le plus chaud ou le plus froid. De plus, si un corps *A* est plus chaud qu'un corps *B*, ce dernier étant lui-même plus chaud qu'un corps *C*, alors le corps *A* est plus chaud que le corps *C*. Et même si nous sommes parfois incapable de distinguer l'état thermique de deux corps du fait que nos organes sont imparfaits, nous acceptons l'idée qu'il existe une grandeur physique dont l'ensemble des valeurs obéit à une relation d'ordre

La reconnaissance intuitive de l'existence d'une séquence ordonnée de températures est ancestrale et consensuelle. Pour avancer, nous devons en faire un principe

Il existe un ensemble doué d'une relation d'ordre dont les éléments sont appelés températures.

Désignons par le signe de l'inégalité "<" cette relation. Cela signifie que deux températures t_1 et t_2 vérifient une, et une seule, des trois relations suivantes

$$t_1 < t_2 \qquad t_2 < t_1 \qquad t_1 = t_2$$

Ce principe s'accompagne tout naturellement de la définition d'une échelle de température, à savoir un ensemble de nombres ordonnés affectés à chaque température. Nous avons convenu de représenter la relation d'ordre par l'inégalité arithmétique, mais ce n'est qu'une convention: on définira systématiquement une échelle de telle façon que le nombre représentant un corps froid soit plus petit que celui représentant un corps chaud.

3. Principe de l'équilibre thermique.

Mettons en présence un corps chaud et un corps froid: ils vont exercer l'un sur l'autre une influence mutuelle qui va se traduire par un échauffement du corps froid et un refroidissement du corps chaud. Au bout d'un certain temps, leurs températures vont se stabiliser, et on ne saura plus dire, quelque soit notre moyen d'investigation, lequel est le plus chaud, lequel est le plus froid: c'est la situation d'équilibre thermique.

Mais une autre propriété importante est reconnue depuis longtemps: en s'échauffant, les corps changent de forme, et, pour la plupart des matériaux, ce changement est une dilatation. Cela signifie que durant l'évolution vers un équilibre thermique entre deux corps, la dilatation du plus froid et la contraction du plus chaud prennent fin lorsqu'ils sont parvenus au stade où leurs degrés de chaud ou de froid ne peuvent plus être distingués.

Cette propriété nous permet de dégager un critère de l'équilibre thermique lorsque nos moyens manquent de précision pour conclure à l'égalité de leurs températures: à l'équilibre thermique, les corps ne changent plus de forme.

Une fois admise l'existence d'états d'équilibre thermique, nous pouvons énoncer un nouveau principe qu'aucune observation n'a jamais remis en cause:

Lorsqu'un corps est en équilibre thermique séparément avec deux autres corps, alors ces deux autres corps sont aussi en équilibre thermique entre eux.

Ce principe, nous allons le voir dans les prochains paragraphes, est à la base de la thermométrie (mesure des températures). Il a semblé suffisamment important pour que certains le qualifient de "principe zéro de la thermodynamique"⁽¹⁾.

4 Echelle de température.

Le principe de l'équilibre thermique signifie que chaque température peut être représentée par un corps particulier porté à cette température et donc qu'on peut obtenir, au moins en théorie, une collection ordonnée de dispositifs représentatifs des différentes températures. Une telle collection constitue en fait un thermomètre puisqu'il suffit de mettre le corps dont on souhaite connaître la température en contact thermique successivement avec chaque dispositif de la collection et de repérer avec lequel il est en équilibre thermique.

Nous verrons qu'un tel thermomètre peut être obtenu par un choix astucieux de dispositifs faciles à manipuler, notamment basés sur la dilatation thermique d'un liquide comme le mercure, l'idée étant de substituer à notre sens tactile grossier du chaud et du froid notre sens de la vue bien plus précis. Mais si on s'en tient à cette définition, la température repérée n'est pas autre chose qu'un marqueur de classes d'équivalence. Or, pour utiliser rationnellement la donnée d'une température, il nous faut faire coïncider un nombre à chaque température de la collection. Et pour que cette correspondance soit cohérente, il faut que ces nombres obéissent eux-mêmes à une relation d'ordre qui ne peut être que l'inégalité: c'est ce qu'on appelle une échelle de température.

Pour exprimer les choses mathématiquement, soit E une échelle de température dont les valeurs sont des nombres réels: à la température t correspond donc la valeur $E(t)$. La définition de l'échelle (et sa convention de sens) implique donc la relation suivante

$$(t_1) \text{ plus froid que } (t_2) \iff F(t_1) < F(t_2)$$

On voit sans peine qu'étant données deux échelles de température F et G , il existe une fonction numérique ϕ telle que

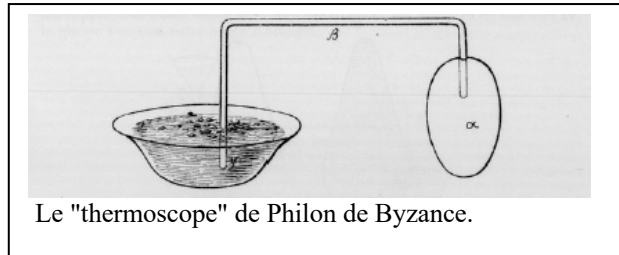
$$G(t) = \phi [F(t)]$$

Il importe de voir qu'une échelle de température ne saurait définir un écart absolu entre deux températures ni définir la température moyenne absolue entre deux températures. Par "mesure absolue", on entend évidemment une mesure indépendante de l'échelle utilisée. Nous verrons plus tard comment la thermodynamique permettra de résoudre cette question.

5. Les premiers dispositifs thermométriques chez les Anciens.

Dès l'Antiquité, des savants se sont efforcés d'inventer des dispositifs permettant de mettre en évidence les effets de l'échauffement ou du refroidissement.

Il semble que Philon de Byzance soit le plus ancien (III^{ème} siècle avant JC) à nous avoir transmis un écrit où il décrit un appareil comportant une boule de plomb hermétiquement fermée par un bouchon traversé par un tube dont l'autre branche plonge dans un réservoir rempli d'eau⁽²⁾. Si on chauffe la boule de plomb en la mettant au soleil, la pression de l'air envoie des bulles dans l'eau. Puis si on la refroidit en la plaçant à l'ombre, l'eau remonte dans le tube. Philon montre ainsi l'effet de la température sur la dilatation de l'air, mais, soumis aux conceptions philosophiques contemporaines, il invoque des explications faisant état de l'impossibilité de l'existence d'un vide d'air et de l'aptitude du feu à se mélanger avec l'air.



Le "thermoscope" de Philon de Byzance.

D'autres savants de l'Antiquité, comme Heron d'Alexandrie au I^{er} siècle de notre ère, construisirent des appareils du même genre que celui de Philon de Byzance. Dans une autre démarche, le médecin grec Galien introduit quatre degrés de froid et quatre degrés de chaud ainsi qu'un degré neutre correspondant à l'état normal d'un patient. Du reste, le *temperamentum* du vocabulaire latin, qui signifie "la manière d'être", est à l'origine de notre mot *température* ⁽³⁾.

6. Les thermoscopes et les thermomètres aux XVI^{ème} et XVII^{ème} siècles.

Qui fut l'inventeur du premier thermomètre ? Plusieurs savants s'attribuèrent, ou se virent attribuer, le mérite de l'antériorité au début du XVI^{ème} siècle: Van Drebbel, Sanctorius, François Bacon, Robert Flud, etc. Pourtant, le médecin Maximien Parchappe rassembla, dans un ouvrage sur Galilée, paru peu après sa mort survenue en 1866, divers témoignages donnant la primeur de l'invention à ce grand savant. Il semble en effet que Galilée expérimentait dès 1602 un dispositif comprenant "une petite carafe de verre de la grosseur d'un petit oeuf de poule dont le col du diamètre d'une tige de blé avait deux palmes de long". Chauffant la carafe avec les mains, il plongeait le col dans de l'eau; puis enlevant les mains de la carafe, on voyait l'eau remonter dans le col ⁽⁴⁾.

En fait, que ce soit Galilée ou autre qui conçut le premier appareil de ce genre n'est pas très important car le saut conceptuel aboutissant à l'invention du thermomètre fut collectif. Dès l'extrême fin du XVI^{ème} siècle, les savants réfléchissaient à des moyens de mettre en évidence le chaud et le froid par des dispositifs basés sur la dilatation thermique l'air, en fait reprenant des idées déjà exploitées par les Anciens comme Philon de Byzance et Heron d'Alexandrie. Ces appareils, constitués par un réservoir prolongé par un tube plongeant dans de l'eau, sont d'abord des thermoscopes, indiquant une variation dans le chaud ou dans le froid. On les appella légitimement des thermomètres dès qu'on les munit d'un système de graduations. Le mot thermomètre apparaît dans un ouvrage écrit en 1626 par un jésuite épris de mathématiques Jean Leurechon ⁽⁵⁾.

L'inconvénient majeur de ces premiers thermomètres était leur manque de reproductibilité. En fait, les tubes étaient ouverts et le résultat dépendait de l'état de l'air atmosphérique dont les savants de l'époque ignoraient encore la nature. De plus, l'eau du récipient était susceptible de s'évaporer, ce qui compliquait la lecture des résultats. C'est alors que des membres de l'*Accademia del Cimento* à Florence eurent l'idée de sceller le tube une fois que le liquide intérieur (de l'esprit-de-vin coloré, c'est-à-dire de l'alcool) soit suffisamment chauffé pour que la dilatation amène son niveau à l'embouchure du tube. Refroidi à un état stable tel que celui d'une cave, l'appareil présentait un niveau d'alcool minimum qu'on repérait comme étant le zéro du thermomètre. On disposait ainsi d'un véritable thermomètre au fonctionnement indépendant de l'état de l'air extérieur⁽⁶⁾.

7. Les problèmes de cohérence entre thermomètres.

Les thermomètres à tube scellé de Florence représentaient une innovation incontestable. L'utilisation d'un autre liquide que l'eau marquait aussi un progrès. Le mercure purifié s'imposa car sa dilatation est bien déterminée. Malgré tout, on constatait que deux thermomètres construits en apparence de la même façon présentaient des écarts de mesure. L'explication en fut reconnue: contrairement au mercure, la dilatation du verre était mal connue, d'autant plus que la composition chimique précise d'un verre dépend de son procédé de fabrication. Mais ces difficultés n'ébranlèrent pas le concept de température pour la raison que chacun était intuitivement convaincu du principe d'équilibre thermique qui pourrait s'énoncer ainsi: si un thermomètre indique une même température pour deux corps, un autre thermomètre indiquera lui aussi une même température pour ces deux corps, et ce quelles que soient les imperfections de chacun des deux thermomètres.

8. L'identification des points fixes.

Avec le développement des thermomètres, les utilisateurs étaient confrontés à un problème qui les empêchait de comparer convenablement leurs résultats. En effet, chaque thermomètre avait une échelle arbitraire propre comprenant une origine supposée correspondre à une température fixe (ici la température d'une cave profonde) et des degrés de froid ou de chaud de part et d'autre de l'origine. Notons que dans une correspondance au Père Mersenne concernant cette question, Jean Rey écrit "Il y a diversité de thermoscopes ou de thermomètres", utilisant les deux mots⁽⁷⁾.

L'idée a donc été de chercher dans la nature des situations où la température ne variait pas. C'est Robert Boyle qui proposa le premier d'admettre le degré de congélation de l'eau comme un point fixe. Mais rapidement s'imposa l'idée qu'il fallait une échelle à deux points fixes, un point froid pour lequel la congélation de l'eau faisait parfaitement l'affaire, mais aussi un point chaud pour lequel on adopta d'abord le degré de fusion du beurre. Delancé en 1688 utilisait ces deux points fixes, séparés par vingt degrés égaux et prolongés par cinq degrés de froid et cinq de chaud, le liquide étant de l'alcool coloré en rouge par de l'orcanette⁽⁸⁾.

Par la suite, d'autres points supposés fixes furent adoptés. Newton 1701 présenta un thermomètre qui en comprenait plusieurs (glace fondante, chaleur du sang humain, fusion de la cire, ébullition de l'eau, fusion de différents alliages de plomb, d'étain et de bismuth, fusion du plomb). Ce savant avait aussi substitué à l'alcool l'huile de lin dont la température d'ébullition est supérieure à celle de l'alcool⁽⁹⁾. Le thermomètre présenté par Amontons (*Mémoires* 1702, 1703) utilise comme liquide le mercure et présente comme point chaud l'eau bouillante.

Finalement, les deux points de repère qui ont fini par s'imposer sont les températures de la glace fondante et de l'eau bouillante. Le premier ne posait pas de problème expérimental important: il suffisait de mettre le mercure du thermomètre en équilibre thermique avec un bac contenant de la glace et de l'eau et de repérer le niveau du mercure par une marque sur le tube en verre. En revanche, le repérage du point d'ébullition nécessitait quelques précautions expérimentales⁽¹⁰⁾. D'autres difficultés provenaient des modifications des propriétés du verre après des années d'utilisation ou bien à des phénomènes de trempe dus à des passages rapides d'une température extrême à l'autre⁽¹¹⁾. Gardons présent à l'esprit qu'en cette première moitié du XVIIIème siècle une imprécision d'un centième était jugée sévère.

Une fois ces deux repères tracés, il ne reste plus qu'à attribuer une valeur à chacun et compléter l'échelle en indiquant les intervalles. Les valeurs extrêmes ainsi que le nombre des intervalles sont bien entendu arbitraires, et nous allons voir que trois échelles se sont rapidement imposées.

9. Les thermomètres du XVIIIème siècle.

C'est dans ce contexte que Daniel Gabriel Fahrenheit développa dès 1714 son procédé de construction de thermomètres avec une échelle qui, bien que compliquée, traversa les siècles jusqu'à nos jours. Elle comportait trois points fixes, le plus froid fixé à 0 étant un mélange de glace, d'eau et de sel marin dont la littérature n'a pas conservé les proportions ni même la nature. Le point intermédiaire fixé à 32 était la glace fondante. Au début, le liquide utilisé était de l'esprit-de-vin (alcool éthylique), puis il fut remplacé dans la version définitive par du mercure. Fahrenheit fixa le point le plus chaud à 212 pour l'ébullition de l'eau à la pression atmosphérique normale correspondant alors à une colonne de 32 pouces de mercure.⁽¹²⁾

Réaumur développa à son tour en 1730 un thermomètre qui utilisait un mélange d'alcool et d'eau dans les proportions qui fassent que sa dilatation du point froid (la glace fondante) au point chaud (l'eau bouillante) soit de 80/1000, les degrés extrêmes étant tout naturellement 0 et 80. Fort bien accueilli en France (Nollet en fit l'éloge) et en Italie, ce thermomètre rencontra des détracteurs en Angleterre (Martine, Desaguliers) mais aussi en Hollande (Musschenbroek) et en Suisse (De Luc), la principale critique étant que l'alcool se dilate moins en vieillissant, contrairement au mercure. En 1737, Maupertuis emmena avec lui en Laponie deux thermomètres de Réaumur, l'un à alcool, l'autre à mercure, et il constata une différence sensible entre les deux. Depuis, on préféra le mercure à l'alcool.⁽¹³⁾

La diffusion des thermomètres Fahrenheit et Réaumur n'était que relative car d'autres modèles eurent une domination plus ou moins éphémère dans tel ou tel pays. Pour leur part, les Suédois utilisèrent à partir de 1742 le thermomètre de leur concitoyen Celsius divisant en 100 parties égales la plage entre la glace fondante (0) et l'eau bouillante (100). L'échelle Celsius, qui deviendra l'échelle centigrade universellement adoptée, trouve son origine dans le mémoire de Celsius publié en 1742.⁽¹⁴⁾

10. La recherche d'une échelle absolue de température.

Avant le milieu du XVIIIème siècle, les thermomètres les plus utilisés avaient acquis une bonne réputation de fiabilité. Les écarts étaient tout-à-fait acceptables y compris pour les expérimentateurs. Le liquide le plus souvent retenu était le mercure. Le repérage et la lecture des niveaux ne posaient pas de difficulté. L'influence de la pression sur les températures de changement d'état avait bien été comprise par les savants, et les constructeurs de thermomètres savaient que le repérage des fameux points fixes devait être fait à la pression atmosphérique au niveau de la mer. Beaucoup d'autres phénomènes étaient considérés avec une grande attention car susceptibles de biaiser les mesures, comme la dilatation du verre, la vapeur issue du liquide thermométrique, etc.

Pourtant, il subsistait un problème de taille car il était d'essence théorique. Si les degrés de température entre les deux points fixes constitués par la congélation de l'eau et son ébullition étaient directement définis par une loi linéaire calquée sur la dilatation du mercure, qu'en était-il d'un autre liquide thermométrique, par exemple l'alcool ? On s'était bien rendu compte qu'un degré intermédiaire comme 25, 50 ou 75 dans une échelle centigrade n'était pas le même avec deux liquides différents: il suffisait de mettre les eux thermomètres en équilibre thermique et de constater que les repères étaient alors différents. Bien entendu, les écarts n'étaient pas considérables, mais suffisants pour comprendre qu'un aspect scientifique important échappait à la compréhension des physiciens de l'époque: existe-t-il une échelle absolue de température, non dépendante des lois de dilatation des différents corps ? Cette question va faire l'objet d'une recherche majeure de la Thermodynamique qui apportera des réponses positives grâce à aux avancées conceptuelles qu'elle va réaliser au cours du XVIIIème siècle. Nous y reviendrons dans des prochains chapitres.

Résumé.

1. Nos sens nous permettent de percevoir le froid et le chaud, mais de façon imprécise et limitée.
2. Nous acceptons le principe de l'existence d'un ensemble muni d'une relation d'ordre dont les éléments sont les températures.
3. Les corps ont des propriétés liées à leur température. Deux corps en contact thermique sont en équilibre thermique lorsque leurs propriétés n'évoluent plus.
4. Une échelle de température est obtenue en attribuant une série de nombres ordonnés respectant l'ordre des températures.
5. Dans l'Antiquité grecque furent inventés des dispositifs où l'échauffement ou le refroidissement d'une poche d'air provoquait des mouvements de bulles ou d'eau dans un tube reliant la poche à un récipient d'eau.
6. Des dispositifs similaires furent réalisés dès le début du XVI^{ème} siècle par Galilée et d'autres. Leur reproductibilité, mauvaise au début à cause de problèmes d'évaporation, fut grandement améliorée en remplaçant les tubes ouverts par des tubes scellés.
7. Ces thermomètres étaient basés sur la dilatation de l'eau ou d'autres liquides parmi lesquels le mercure purifié s'imposa du fait que sa dilatation était simple à repérer. Mais la dilatation du verre était mal connue, d'où un manque de cohérence entre les thermomètres des différents fabricants.
8. La glace fondante puis l'eau bouillante furent identifiées comme des situations à température constante (sous pression atmosphérique), ce qui permit d'assurer une bien meilleure cohérence entre les différents thermomètres.
9. Trois échelles thermométriques se sont imposées au XVIII^{ème} siècle: celle de Fahrenheit, Réaumur puis Celsius (0-100 pour l'intervalle glace fondante - eau bouillante), qui devint l'échelle centigrade.
10. Les thermomètres basés sur la dilatation linéaire du liquide thermométrique utilisé donnaient des mesures dépendant de ce liquide. Ce n'était pas trop grave en pratique, mais à la fin du XVIII^{ème} siècle, on n'avait pas de théorie conduisant à une échelle thermométrique absolue.

Bibliographie.

- *) [Leurechon 1626] **Jean Leurechon** *Recreation mathematicque* (Pont-à-Mousson 1626).
- *) [Dalencé 1688] **Joachim d'Alencé** *Traitez des Baromètres, Thermomètres et Notiomètres ou Hygromètres* (Henry Wetstein, Amsterdam 1688).
- *) [Amontons 1702] **Guillaume Amontons** *Discours sur quelques propriétés de l'air & le moyen d'en connoître la température dans tous les climats de la Terre* Mémoire de l'Académie Royale des Sciences 1702 (p.155-174).
- *) [Amontons 1703] **Guillaume Amontons** *Le thermomètre réduit à une mesure fixe & certaine & le moyen d'y rapporter les observations faites avec les anciens thermomètres* Mémoire de l'Académie Royale des Sciences 1703 (p.50-56).
- *) [Celsius 1742] **Anders Celsius** *Von zween beständigen Graden* Act. de la Soc. roy. de Suède (1742).
- *) [Parchappe 1866] **Maximien Parchappe** *Galilée, sa vie, ses découvertes et ses travaux* (Paris, Hachette 1866).
- *) [Hoefer 1872] **Ferdinand Hoefer** *Histoire de la Physique et de la Chimie* (Hachette, Paris 1872).
- *) [Jamin 1885] **Jules Célestin Jamin** *Cours de Physique de l'Ecole Polytechnique (t.2 fasc.1 Thermométrie, Dilatations)* (Gauthier-Villars, Paris 1886 (4ème éd.)).
- *) [Maxwell 1891] **James Clerk Maxwell** *La chaleur* (B. Tignol, éditeur, Paris 1891 (éd. française d'après la 8ème éd. anglaise)).
- *) [Fowler & Guggenheim 1939] **R. H. Fowler, E. A. Guggenheim** *Statistical Thermodynamics* (University Press, Cambridge 1939).
- *) [Freundlich 2006] **Jonathan Freundlich** *La mesure de la température* (Cours d'Histoire et Philosophie des Sciences, Année 2006-2007).

Notes.

- 1) Fowler & Guggenheim 1939 p.56. "This postulate of the *Existence of temperature* could with advantage be known as *the zeroth law of thermodynamics*."
- (2) Une partie de l'oeuvre de Philon de Byzance nous a été conservée par les Arabes. C'est le cas de son traité sur les Pneumatiques dont la version arabe a été éditée et traduite par le baron Carra de Vaux (*Le livre des appareils pneumatiques par Philon de Byzance*, Paris 1892). Le dispositif thermoscopique de Philon y est détaillé au § 7 p.102-103.
- (3) Freundlich 2006 p.4.
- (4) Parchappe 1866 p.45-47 mentionne des lettres de Sagredo (1613, 1615) et de Castelli (1638). La citation est issue de la lettre de Castelli.
- (5) Leurechon 1626 probleme 76 p.75-77. *Du Thermometre, ou Instrument pour mesurer les degrez de chaleur ou de froidure, qui sont en l'air*.
- (6) Hoefer 1872 p.112-113.
- (7) *ibid* p.113. La référence donnée par Hoefer dans sa note 2 ne semble pas être la bonne.
- (8) Delancé 1688 p.73 (cité par Hoefer 1872 p.114).
- (9) Hoefer 1872 p.114.
- (10) Pour le repérage du point d'ébullition, l'une des difficultés vient de ce que le mélange de l'eau bouillante et de sa vapeur n'est pas aussi homogène que le mélange d'eau et de glace. La vapeur surnage l'eau dans lequel existe un gradient de température entre le fond du récipient et sa surface en ébullition. Les premiers expérimentateurs du XVIIIème siècle se sont rendus compte qu'il ne fallait donc pas plonger le thermomètre dans l'eau mais dans la vapeur, ce qui posait d'autres problèmes pratiques sachant que la vapeur elle-même subit dans l'air un certain refroidissement. Une autre difficulté résidait dans l'influence de la pression atmosphérique sur les températures de changement d'état: pour la congélation de l'eau, l'effet est assez faible, mais il est plus important pour la vaporisation de l'eau. Sur ces difficultés et la façon de les contourner, voir Jamin 1886 p.22-25 et Maxwell 1891 p.47-50.
- (11) Jamin 1886 p.25-26.
- (12) Hoefer 1872 p.115, Maxwell 1891 p.51-52.
- (13) Hoefer 1872 p.115-117.
- (14) *ibid* 1872 p.116.